olimpiada Matemática aragonesa XXXI

Fase final

20 de mayo de 2023

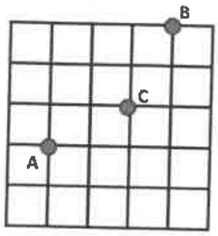
Soluciones

Fase Final

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Problema 1. *Recorriendo manzanas*

El plano de un barrio de una ciudad se puede esquematizar como una retícula cuadrada como la de la imagen en donde las líneas son las calles y los cuadrados los bloques de pisos (manzanas). La distancia entre dos intersecciones de calles consecutivas (la longitud de cada uno de los lados de las manzanas de pisos) es de 133 metros.



a) *Si estás en el punto A y quieres ir al punto B, ¿cuál es la distancia más corta que debes recorrer? (suponemos que vamos por las calles y no podemos atravesar los bloques de pisos).*
b) *¿De cuántas formas diferentes puedes hacer ese recorrido de forma que andes la menor distancia posible?*
c) *¿Cuántos de los caminos del apartado anterior pasan por el punto C?*

Solución:

a) En la retícula, desde cada cruce de calles (vértice de los cuadrados) solo nos podemos mover hacia delante, hacia atrás, a la derecha o a la izquierda. Como el punto B está situado a la derecha y por encima de A, la forma más corta de llegar se alcanza cuando solo hacemos movimientos hacia la derecha o hacia arriba. En total tenemos que desplazarnos tres manzanas hacia la derecha y tres manzanas hacia arriba. El orden en el que hagamos estos 6 movimientos es indiferente. Como cada lado de las manzanas tiene 133 metros. La menor distancia que puedo recorrer para ir de A a B será:

$$\mathbf{133 \cdot 6 = 798\,m}$$

b) Este apartado se puede resolver de varias formas.

Por ejemplo, se pueden calcular cuantas combinaciones de listados con tres D y tres A (representando los movimientos a Derecha y hacia Arriba) pueden construirse:
DDDAAA
DDADAA DDAADA DDAAAD
DADDAA DADADA DADAAD DAADDA DAADAD DAAAD
Vemos que hay diez caminos distintos si el primer desplazamiento es a la derecha, como el papel de la A y la D se pueden intercambiar, **en total habrá 20 caminos.**

c) Este apartado se puede resolver examinando los caminos obtenidos en el apartado anterior puede resultar más sencillo comenzar el problema desde el principio.

Podemos dividir este problema en dos diferentes:
¿Cuántas formas hay de ir del punto A al C? Dos movimientos a la derecha y uno hacia arriba: DDA, DAD y ADD. Luego hay tres caminos distintos.
¿Cuántas formas hay de ir del punto C al B? Un movimiento a la derecha y dos hacia arriba: DAA, ADA y AAD. Luego hay tres caminos posibles.
Por tanto, como hay tres formas distintas de ir a C y una vez que estás en C hay tres formas posibles de ir a B. **El número de caminos diferentes de A a B pasando por C es:**

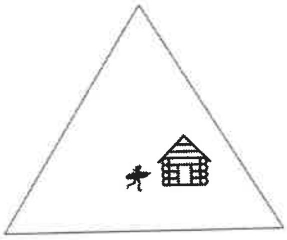
$$\mathbf{3 \cdot 3 = 9}$$

Soluciones

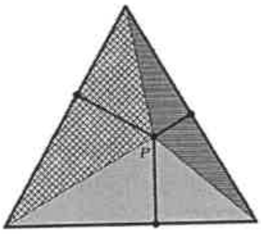
Fase Final

Problema 2. *Teorema de Viviani*

Una surfista quiere construirse una cabaña en la isla triangular equilátera en que vive. Cada día quiere surfear desde los tres lados de la isla. Ha de decidir en qué punto levanta su vivienda, de modo que la suma de las distancias a los tres lados sea mínima. Te vamos a ayudar. Vicenzo Viviani probó en 1659 que da igual el punto que elija.
Demuestra por qué y averigua cuánto vale siempre la suma de las tres distancias.



Solución:
Dado un triángulo equilátero y un punto P del interior del mismo o de su perímetro, la suma de las distancias de ese punto P a cada uno de los lados es constante, y exactamente igual a la altura del triángulo, sea cual sea dicho punto P.
Demostración:
Llamamos A, B, C a los vértices del triángulo equilátero, L a la longitud de cada uno de sus lados y h a su altura, y tomamos un punto P interior al mismo. Llamamos a *a* la distancia de P al lado AB, *b* a la distancia de P al lado BC y *c* a la distancia de P al lado AC. Tenemos entonces la situación de la *figura*.



Ahora calculamos el área del triángulo ABC de dos maneras: con la fórmula habitual, *base por altura dividido entre 2*, y como suma de las áreas de los triángulos ABP, BCP y ACP. Para éstas últimas, usaremos la misma fórmula habitual y que las bases son los lados del triángulo y las alturas *a*, *b* y *c*, respectivamente:

$$\text{Área } ABC = \text{Área } ABP + \text{Área } BCP + \text{Área } ACP$$

$$\text{Área } ABC = \frac{L\cdot h}{2} \quad || \quad \text{Área } ABP = \frac{L\cdot a}{2}$$

$$\text{Área } BPC = \frac{L\cdot b}{2} \quad || \quad \text{Área } ACP = \frac{L\cdot c}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{L\cdot h}{2} = \frac{L\cdot a}{2} + \frac{L\cdot b}{2} + \frac{L\cdot c}{2}$$

Y ya casi está. Simplemente hay que multiplicar por 2 a ambos lados de la igualdad y después dividir entre *L*, también a ambos lados, para obtener la igualdad buscada: $h=a+b+c$

Como la elección del punto P no tiene influencia en el desarrollo, el teorema queda demostrado.

Problema 3. *Campeonato matemático*

En la final del Campeonato Matemático de Fútbol Mixto se enfrentan los "Pitagóricos " contra los "Hipatianos ". Han llegado al último segundo del partido y no puede haber más emoción porque los equipos van empatados y el árbitro ha pitado penalti a favor de los "Pitagóricos". Estos ganarán si consiguen hacer gol. Sabemos las siguientes estadísticas del portero de los "Hipatianos" y de la jugadora que lanza el penalti de los "Pitagóricos":

- Portero: se lanza a su derecha en 2 de cada 5 penaltis; se queda en medio en 2 de cada 10 penaltis; y en el resto se lanza a su izquierda.
- Jugadora que tira el penalti: lanza a su derecha 3 de cada 5 penaltis; 1 de cada 10 los lanza por el medio; y el resto los lanza por su izquierda. Además, todos los penaltis que lanza son dentro de la portería.

Con estas estadísticas y, suponiendo que, si coincide la trayectoria del balón con la del portero el penalti es parado y no es gol:

a) ¿Qué es más probable, que ganen los "Pitagóricos" o que vayan a la prórroga por seguir empatados?
b) Si finalmente el penalti lanzado por la jugadora de los "Pitagóricos" ha sido gol, ¿es más probable que haya metido el gol por su derecha o por su izquierda?

Solución:

a) Se puede usar un diagrama de la siguiente manera:

JD(6/10) — G(6/10), E(4/10)
JC(1/10)) — G(8/10), E(2/10)
JI(3/10)) — G(6/10), E(4/10)

Usando la probabilidad total:
P(empatar) = P(lanza por su drcha. y portero se lanza a su izda.)+P(lanza por el centro y portero se queda en el centro)+P(lanza por su izda. y portero se lanza a su drcha.)=3/5·2/5+1/10·2/10+3/10·2/5=19/50
P(ganar)=1-P(empatar)=1-19/50=31/50

Por tanto, es más probable que ganen los Pitagóricos.

b) Usando el diagrama anterior y Bayes:

P(lanza su drcha./ganar)=P(lanza su drcha. y gana)/P(ganar)=(6/10·6/10)/(31/50)=(9/25)/(31/50)= 18/31

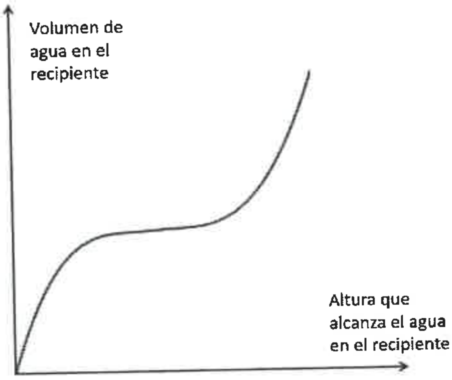
P(lanza su izda./ganar)=P(lanza su izda. y gana)/P(ganar)=(3/10·6/10)/(31/50)=(9/50)/(31/50)= 9/31

Por tanto, será más probable que el gol lo haya metido por su derecha.

OTRAS SOLUCIONES: Al no pedir específicamente la probabilidad se pueden dar otro tipo de soluciones más intuitivas y menos formales.

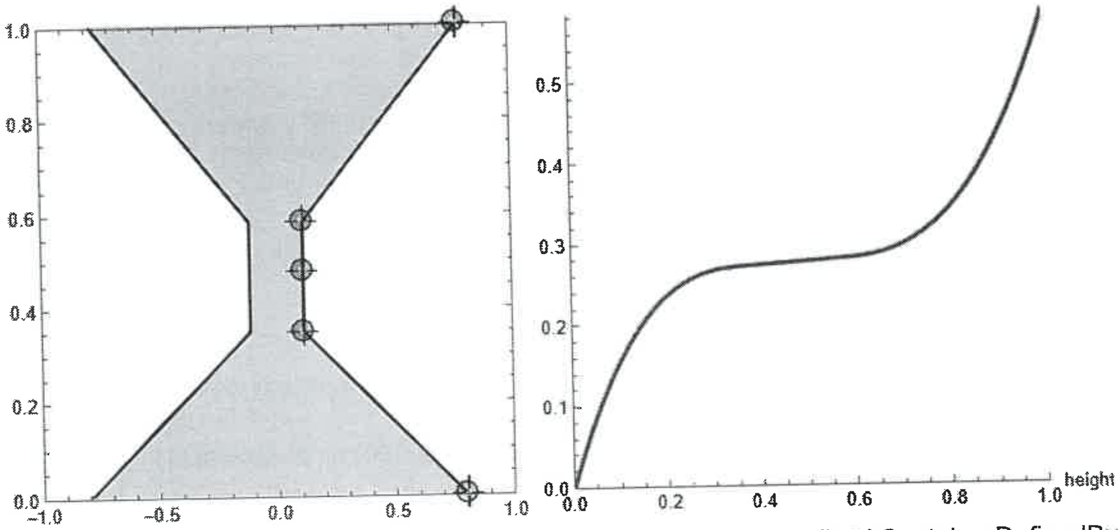
Problema 4. *Recipiente rebosante*

Tenemos un recipiente en el cual podemos verter agua, de tal manera que el agua no escapa por ningún sitio a no ser que su nivel desborde el recipiente. La gráfica muestra la relación entre el volumen de agua dentro del recipiente y la altura que alcanza el agua. **Describe cómo es el recipiente y haz un dibujo de este.**



Solución:

Observemos la curva de la gráfica. Tenemos que incrementos iguales de altura cada vez se corresponden con mayores incrementos de volumen hasta llegar a cierta altura. Esto quiere decir que, si asumimos que es un cuerpo de revolución, la sección se va estrechando para alturas bajas conforme echamos agua y se va llenando el recipiente. Llega un momento en que se aprecia que el incremento en altura apenas produce incremento en volumen, lo que quiere decir que es una sección muy estrecha en la parte media del recipiente. Parece ser una recta en esa parte media, por lo que entendemos que la sección es fija ahí. Por lo demás, la parte de la gráfica que queda cambia la curvatura, de manera que incrementos iguales de altura dan lugar a incrementos cada vez mayores de volumen. Es una especie de diábolo o reloj de arena.



Gráfica y dibujo realizados con https://demonstrations.wolfram.com/FillingAContainerDefinedByACurve/

olimpiada Matemática aragonesa XXXI

Fase final

20 de mayo de 2023

Soluciones

Fase Final

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Problema 5. *Rascacielos seccionando cubo*

En la actualidad, el One World Trade Center de Nueva York es el séptimo rascacielos más grande del mundo. Diseñado por David Childs, este edificio tiene una forma de poliedro muy curiosa.

Estudiamos un poliedro similar a partir de hacer secciones de un cubo, esto es, realizando cuatro cortes rectos desde la cara de arriba del cubo:

1. El primer corte se realiza pasando por dos puntos medios de las aristas de la cara de arriba del cubo (puntos A y B en la Figura 1) y de un vértice de la cara de abajo (punto P en la Figura 1). De esta manera, separamos el cubo en dos poliedros distintos, donde uno de ellos es una pirámide. Nos quedamos con el otro.
2. El segundo corte se realiza pasando por el punto B, otro punto medio de una arista en la cara de arriba (punto C, Figura 2) y otro de los vértices de la cara de abajo (punto Q, Figura 2).
3. El tercer y el cuarto cortes son análogos a los anteriores y pasan ambos por el punto medio de la otra arista (punto D, Figura 3) y por los puntos C y A y los vértices R y S, respectivamente.

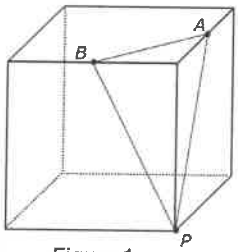


Figura 1

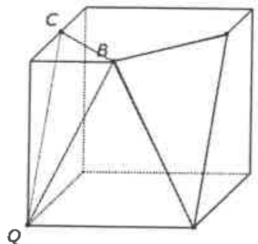


Figura 2

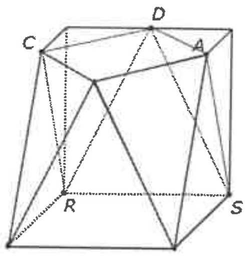


Figura 3

Imagina que se construye en tu ciudad un edificio con esta forma (Figura 4) y que tiene 40 metros de ancho y de alto. Tanto las caras triangulares de los lados como el tejado de arriba están hechos de cristal.

¿Qué cantidad de cristal habría que adquirir para construirlo?

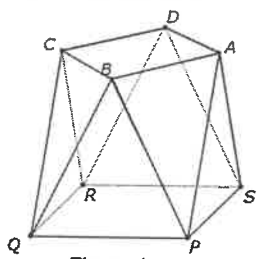


Figura 4

Solución:

Para conocer la cantidad de cristas que habría que comprar, es necesario conocer el área lateral del poliedro formada por triángulos y el área de la base superior.

En el enunciado se indica que se quiere que el edificio tenga 40 metros de ancho y 40 metros de alto, por lo que estaremos construyendo en edificio, realizando secciones de un cubo de arista 40 metros.

Soluciones

Fase Final

Es interesante identificar las figuras que forman las caras de este poliedro. En concreto, por la información de su construcción sabemos que:

- La base inferior es un cuadrado, ya que es la cara de un cubo.
- La base superior es un cuadrado, ya que es un cuadrilátero de lados iguales y cuyas diagonales son iguales.
- Las caras laterales son ocho triángulos isósceles, donde los cuatro triángulos que están sobre las caras del cubo son iguales y los cuatro triángulos que aparecen al seccionar las aristas son iguales. Además, es importante apreciar que los triángulos que están en las caras de un cubo no tienen las mismas dimensiones que los triángulos producto de las secciones.

Por un lado, la base superior es un cuadrado. Se puede calcular su área de diferentes maneras, por ejemplo:

- La construcción de dicha cara se realiza realizando cortes a un cuadrado por los puntos medios de sus lados, por lo que se puede apreciar de manera directa que queda exactamente ½ del cuadrado original. Su área es la mitad del área de la base inferior, esto es, 1600 / 2 = 800 metros cuadrados.
- Un cuadrado es un caso particular de rombo. Las diagonales de este rombo miden exactamente el tamaño de las aristas: 40 metros. Por lo que el área de la base superior: Dxd/2 = 40x40 / 2 = 800 metros cuadrados.
- Se calcula el área a través del lado del cuadrado. Debido a la construcción, podemos saber aplicando el teorema de Pitágoras, que el lado de la base superior mide $\sqrt{20^2+20^2}=\sqrt{800}\cong 28{,}28$ metros. Por lo que el área de la base superior es 800 metros cuadrados.

Se puede calcular de distintas maneras el área de los triángulos que están en las caras del cubo:

- En la construcción de estos triángulos se puede apreciar que ocupan exactamente la mitad del área de la cara cuadrada del cubo. Por tanto, su área es la mitad de la cara del cubo, esto es, 1600 / 2 = 800 metros cuadrados.
- Se puede aplicar la fórmula del área del triángulo, donde la base es la arista del cubo y la altura mide lo mismo que la arista del cubo.

Por tanto, el área total de los cuatro triángulos de las caras del cubo es 3200 metros cuadrados.

Se puede calcular el área de los triángulos productos de seccionar el cubo, aplicando Pitágoras:

- La base del triángulo es igual a $\sqrt{20^2+20^2}=\sqrt{800}\cong 28{,}28$ metros.
- Para calcular la altura del triángulo, se puede realizar de dos maneras:
  1. Aplicando Pitágoras sobre un triángulo rectángulo formado sobre la altura del triángulo, la arista (seccionada) del cubo y el segmento que une el vértice (seccionado) del cubo con la base del triángulo. Por lo que la altura del triángulo mide $\sqrt{1600+200}=\sqrt{1800}\cong 42{,}43$ metros.
  2. Aplicando Pitágoras (dos veces): una para conocer el lado del triángulo (mide $\sqrt{40^2+20^2}=\sqrt{2000}\cong 44{,}72$ metros) y otra para conocer la altura, empleando el lado y la mitad de la base del triángulo, ya que el triángulo es isósceles. Por lo que la altura del triángulo mide $\sqrt{2000-200}=\sqrt{1800}\cong 42{,}43$ metros.

Así, el área de un triángulo que se forma al seccionar el cubo es 600 metros cuadrados. Por tanto, el área total de los cuatro triángulos que se forman al seccionar el cubo es 2400 metros cuadrados.

El área total que hay que recubrir con cristal es:
800 + 3200 + 2400 = 6400 metros cuadrados

Nota: En el caso en el que el resultado no sea este número exacto ya que se trabajan y se realizan operaciones con las medidas representadas en números decimales, producto de realizar redondeos o truncamientos al calcular las raíces cuadradas, el resultado también será correcto.